29/11/15

$(E_0)$ $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ , $a_i \in C(I)$ , $a_n(x) \neq 0$ $\forall x \in I$

Ο χώρος των λύσεων είναι γραμμικός χώρος διάστασης $n$.

• $(2x+1)y'' - 4(x+1)y' + 4y = 0$, $x > -1/2$

Να επιλυθεί η εξίσωση που ικανοποιεί την $y_0(0)=0$, $y_0'(0)=-1$ και $y_1 = e^{cx}$ και $y_2 = ax+\beta$.

$(2x+1)c^2 e^{cx} - 4(x+1)ce^{cx} + 4e^{cx} = 0 \Rightarrow e^{cx}\left[(2x+1)c^2 - 4(x+1)c + 4\right] = 0$

$x > -1/2$, η εκθετική δεν μηδενίζεται , για $x=0$ : $c^2 - 4c + 4 = 0$

$\Rightarrow$ $c=2$ βρήκαμε μία λύση *(πρέπει να διαπιστώσω ότι ισχύει για όλα τα $x$)

$c=-2$

Πράγματι για $c=2$ : $(2x+1)4 - 8(x+1) + 4 = 8x + 4 - 8x - 8 + 4 = 0$ //

άρα όντως είναι λύση.

για την $y_2 = ax+\beta$ : $-4(x+1)a + 4(ax+\beta) = 0$ , $x > -1/2$

$-4\cancel{ax} - 4a + 4\cancel{ax} + 4\beta = 0 \Rightarrow a=\beta$ , η πιο απλή είναι η $y_2 = x+1$ το ελέγχω όμως ότι την ικανοποιεί.

Θέλω να ελέγξω γραμμική ανεξαρτησία :

$$W(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & x+1 \\ 2e^{2x} & 1 \end{vmatrix} = e^{2x} - (x+1)2e^{2x} = e^{2x} - x2e^{2x} - 2e^{2x} =$$

$= -e^{2x}(1 + x2e^{2x}) \neq 0$. Άρα οι λύσεις γραμμικώς ανεξάρτητες

Scanned by CamScanner

συνεπώς το σύνολο $\{y_1, y_2\}$ : ΒΣΛ , άρα οι λύσεις της μορφής $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2(x+1)$ , $x > -1/2$.

$y_0(0) = c_1 + c_2 = 0$

$y_0'(0) = 2c_1 e^{2 0} + c_2 = -1 \rightsquigarrow 2c_1 + c_2 = -1$

$\left.\right\} c_1 = -c_2 \rightsquigarrow c_2 = 1/2$

$2c_1 - c_1 = -1 \rightsquigarrow c_1 = -1/2$

Παράδειγμα 4 σελίδα 79

$y_1(x) = e^x$

$y_2(x) = e^x(x-1) = xe^x - e^x$

$y_3(x) = 2e^x - e^{2x}$

$\rightsquigarrow y''' - 4y'' - 5y' - 2y = 0.$

Με αντικατάσταση ελέγχω αν είναι λύσεις.

$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}}{a_n} ds}$

$y_1'(x) = e^x = y''(x)$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x - e^x & 2e^x - e^{2x} \\ e^x & e^x + xe^x - 1 & 2e^x - 2e^{2x} \\ e^x & e^x + e^x + xe^x & 2e^x - 4e^{2x} \end{vmatrix} \quad \text{ή} \quad W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$\int_0^4 -4/1\, ds$

Παράδειγμα 3 σελίδα 78

$x^3y''' - 4x^2y'' + 8xy' - 8y = 0$ , $x > 0$

| | |
|---|---|
| $y_0(1) = 0$ <br> $y_0'(1) = 1$ <br> $y_0''(1) = 2$ | $y(x) = x^v$ * (λύνω και αν βρω δύο $v$ τότε σημαίνει ότι υπάρχει άλλη μιας άλλης μορφής, βρίσκω 3 δηλαδή 3 διαφορετικές συναρτήσεις και ελέγχω γραμμική ανεξαρτησία). |

Θεώρημα 8

Ας είναι $\{y_1, \ldots, y_n\}$ γραμμικώς ανεξάρτητες συναρτήσεις, $y_i(x) \in C^{(n)}(I)$ με $W(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$ $\forall x \in I$. Τότε υπάρχει μοναδική ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση $n$-τάξης της μορφής $(E_0)$ η οποία έχει το $\{y_1, \ldots, y_n\}$ ως ένα Βασικό σύνολο λύσεων και $a_n = 1$, $x \in I$.

Απόδειξη (Να διαβαστεί από το βιβλίο σελίδα 74)

## Παράδειγμα 5

$y_1(x)=x, \quad y_2(x)=x\log x, \quad x>1$

$$W(y_1,y_2)(x)=\begin{vmatrix} x & x\log x \\ 1 & \log x+1 \end{vmatrix} = x\log x + x - x\log x = x > 0.$$

$$\frac{1}{x}\, W(y_1,y_2,y)=\begin{vmatrix} x & x\log x & y \\ 1 & \log x+1 & y' \\ 0 & \frac{1}{x} & y'' \end{vmatrix} = \frac{1}{x}\left[ x y'' - y' - \frac{1}{x} y \right]=0$$

• Να βρεθεί μια εξίσωση να έχει β.σ.λ τις $y_1(x)=\cos x$, $y_2(x)=\sin x$, γραμμική διαφορική εξίσωση 2ης τάξης ομογενής

$$W(x)=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1, \quad W(y_1,y_2,y)=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x & y \\ -\sin x & \cos x & y' \\ -\cos x & -\sin x & y'' \end{vmatrix} = \dots =$$

$= y''+y=0$

*(άρα από ένα β.σ.λ $\Rightarrow$ ξέρω όλες τις λύσεις)